K-TEORÍA Y OPERADORES DE FREDHOLM

JUAN FRANCISCO ESCAMILLA CASTILLO

Resumen. The aim of this paper is to describe the relation between the K-theory and the Fredholm's Operators on Hilbertspaces with the pourpose to give a short and quickly introduction to the principal ideas on K-theory. It is addressed to non specialists on algebraic topology. The first part of this work resumes the needed bagage in Algebra and Topology to understand the principal facts on K-theory.

En estre trabajo se describe, en forma rápida y suscinta, la relación que existe entre la K-teoría y los operadores de Fredholm entre espacios de Hilbert. Está dirigido a no especialistas en topología algebraica. En la primera parte del trabajo se dan las nociones fundamentales de topología y álgebra para entender los fundamentos de la K-teoría.

Preliminares

En los úlltimos años el desarrollo de las matemáticas ha sido tal, que cada vez es más difícil hacer la distinción entre matemáticas puras y matemáticas aplicadas y delimitar los diferentes campos de las matemáticas, ya que cada vez es mayor la interacción entre éstos. Así, por ejemplo, resultados de la topología y geometría algebraicas y diferencial han encontrado múltiples aplicaciones en el campo de la física teórica, en particular en la teoría gauge y teoría de cuerdas.

En esta exposición quiero dar algunos ejemplos de la utilización de algunos elementos del análisis funcional en la topología algebraica, en particular en la llamada K-teoría. Los resultados aquí expuestos son un resumen de las ideas desarrolladas en Atiyah [1]

La K-teoría fue introducida por Alexander Grothendieck en la geometría algebraica y por Friedrich Hirzebruch y M.F. Atiyah en la topología algebraica, donde ha desempeñado un papel muy importante. También ha sido introducida en el análisis y en la teoría de números por Quillen. Actualmente existe una teoría puramente algebraica de ésta.

La K-teoría constituye la primera de las llamadas *teorías de cohomología extraordinaria*. Uno de los resultados esenciales de esta teoría y que ha permitido su ulterior desarrollo, así como sus aplicaciones a otros campos, es el llamado *Teorema de Periodicidad de Bott*. En efecto, gracias a este resultado, es posible mostrar que la K-teoría cumple con los *axiomas de Eilenberg-Steenrod* para una teoría de cohomología, ver [10]. La más importante de estas teorías es la *Teoría del Cobordismo Complejo*. De hecho la K-teoría se obtiene como un cociente de dicha teoría, como lo demuestran Conner y Floyd en [5]. Moravia ha establecido toda una jerarquía de las teorías de cohomología intermedias entre la K-teoría y la teoría del cobordismo complejo. De éstas , la primera corresponde al grupo formal de curvas elípticas y se ha cristalizado en la llamada *cohomología elíptica*. Ésta ha encontrado varias aplicaciones en la física teórica, en particular ha sido utilizada por Witten en la *Teoría de Cuerdas*.

Una de las principales aplicaciones de K-teoría la constituye la demostración del llamado *Teorema del índice de operadores diferenciales elípticos* por Atiyah y Singer en [3]. También es utilizada en el *Teorema del índice de operadores del tipo de Dirac*, el cual tiene su aplicación en la teoría Gauge.

El índice del operador de Dirac también interviene en la definición de invariantes topológicas como la invariante de Kreck-Stolz, utilizada en la clasificación de variedades diferenciables con *métricas de curvatura de Ricci positiva*.

1. Conceptos Fundamentales

Nomenclatura. por $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, denotaremos respectivamente el conjunto de los números reales, enteros y complejos. Por $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, los espacios vectoriales real y complejo de dimensión n respectivamente. $\mathbb{Z}$ lo consideraremos dotado de la topología discreta, cuando consideremos aplicaciones continuas y $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ dotados de la topología canónica. Por $\mathbb{S}^n$ denotaremos la esfera de radio uno de dimensión n contenida en $\mathbb{R}^{n+1}$. El concepto de espacio compacto que utilizaremos implica Hausdorff y por consiguiente normales.

1.1. Análisis Funcional. [6] Todos los espacios vectoriales, salvo que se especifique lo contrario son complejos. Dados dos espacios de Banach X, Y, denotaremos por $L(X,Y)$ al conjunto de aplicaciones lineales de X en Y, dotado de la topología inducida por norma del supremo. Por $End(X)$ denotaremos al conjunto de todos los endomorfismos continuos de X en X. $(End(X),+,\circ)$, donde $\circ$ es la composición, es un álgebra de Banach.

Si X es un espacio vectorial y $Y \subseteq X$ un subespacio, definimos codimensión de Y como $codimY := dim(X/Y)$.

Si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal definimos $codimT := dim(Y/T(X))$. El núcleo de T lo denotaremos por $KerT$.

En lo sucesivo sean X, Y espacios de Banach $T : X \to Y$ una aplicación lineal continua, decimos que T es un *Operador de Fredholm* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $dimKerT < \infty$
2. $codimT < \infty$

El número $indT := dimKerT - codimT$ se llama el *el índice de* T.

Por $\mathcal{F}(X,Y)$ denotaremos al conjunto de todos los operadores de Fredholm de X en Y, si $X = Y$ escribiremos o simplemente $\mathcal{F}$ si no hay confusión al espacio a que nos referimos.

Se tienen los siguientes resultados:

1. $\mathcal{F}(X,Y)$ es un subespacio topológico abierto en $L(X,Y)$
2. $indT : \mathcal{F}(X,Y) \to \mathbb{Z}$ es continua y por consiguiente constante sobre cada componente conexa de $\mathcal{F}(X,Y)$
3. $T(X)$ es cerrado en Y $\forall T \in \mathcal{F}(X,Y)$
4. Si $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ son operadores de Fredholm, entonces la composición $S \circ T$ es también de Fredholm y $ind(S \circ T) = indT + indS$.

En el caso particular en que $\mathcal{F} \subseteq End(X)$, $(\mathcal{F}, \circ)$ es un semigrupo.

Decimos que un operador $T \in L(X,Y)$ es *compacto* si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se cumplen:

1. La cerradura de la imagen de todo subconjunto acotado de X es compacta en Y
2. La cerradura de la imagen de la bola abierta unitaria es compacta en Y
3. Si (x_n), $x_n \in X$ es una sucesión acotada, entonces (Tx_n) posee una subsucesión convergente

Por $\mathcal{K}$ designaremos al conjunto de operadores compactos sobre X. $\mathcal{K}$ es un ideal bilátero de $End(X)$ y $(\mathcal{B}, +, \circ)$, donde $\mathcal{B} := End(X)/\mathcal{K}$ es un álgebra de Banach.

Si T es un operador de Fredholm y K un operador compacto, entonces $T+K$ es un operador de Fredholm. En particular, si $K \in \mathcal{K}$ el operador $I-K$, donde I es la identidad es de índice 0.

1.2. Algebra. A un conjunto G dotado de una operación binaria $\cdot : G \times G \to G$ asociativa lo llamaremos un *semigrupo*. Si además G está dotado de otra operación binaria $*$ asociativa y distributiva respecto de $\cdot$, entonces $(G, \cdot, *)$ se llama un *semianillo*.

Sea X un conjunto, por $F\langle X\rangle$ denotaremos al grupo libre abeliano generado por X. Éste tiene la siguiente propiedad universal: dada una aplicación $f : X \to G$, donde G es un grupo abeliano cualquiera, existe un único homomorfismo
$\varphi : F\langle X\rangle \to G$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & G \\ F\langle X\rangle \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión de X en $F\langle X\rangle$.

1.2.1. El Grupo de Grothendieck. Sea $(A, \cdot)$ un semigrupo abeliano. Podemos asignarle a A un grupo abeliano $K(A)$ con la siguiente propiedad universal: dado un homomorfismo de semigrupos $f : A \to G$, donde G es un grupo abeliano cualquiera, existe un único homomorfismo $\varphi : F\langle A\rangle \to G$ que hace conmutar al diagrama $\varphi : F\langle A\rangle \to G$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & G \\ K(A) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$K(A)$ está definido de la siguiente manera: $K(A) := F\langle A\rangle / E\langle A\rangle$, donde $E\langle A\rangle$ es el subgrupo de $F\langle A\rangle$ generado por los elementos de la forma $a+b-(a\cdot b), \forall a, b \in A$. Si A posee la estructura adicional de semianillo, entonces $K(A)$ es un anillo, llamado el *anillo de Grothendieck*. $K()$ es un funtor covariante, es decir si $f : A \to B$ es un homomorfismo de semigrupos (semianillos) abelianos, f induce un homomorfismo de grupos (anillos) $f_* : K(A) \to K(B)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K(A) \arrow[d, "f_*"] \\ B \arrow[r, "i_B"'] & K(B) \end{tikzcd}$$

Observacón 1.2.1. Como todo elemento universal $K(A)$ es único salvo isomorfismo.

FIGURA 1.3.1. Suspensión

1.3. Topología. ([10], [11]) Sean X un espacio topológico y el intervalo cerrado $I := [0, 1]$, al espacio cociente SX que consiste en reducir, en $X \times I$, $X \times \{0\}$ a un punto y $X \times \{1\}$ a otro punto, dotado de la topología cociente lo llamamos la *suspensión* de X. (Figura 1.3.1). Este espacio juega un papel muy importante en la teoría de la homotopía , tiene propiedades muy similares a la esfera y es conexo por caminos. En particular si $X := \mathbb{S}^n$, entonces SX es homeomorfo a $\mathbb{S}^{n+1}$.

La suspensión puede ser aplicada a un espacio cualquier número de veces, $S^n X$ significa que la suspensión ha sido aplicada n veces al espacio X.

Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ un punto fijo entonces al par (X, x_0) lo llamamos un espacio topológico con punto based x_0.

Dados dos espacios topológicos (X, x_0), (Y, y_0) con puntos base, definimos la *suma puntual*, como $X \vee Y := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ y el *producto reducido* como $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$, que es también un espacio con punto base.

Al producto reducido de la esfera unidimensional con punto base $(\mathbb{S}^1, s_0)$ con un espacio con punto base (X, x_0) lo llamamos la *suspensión reducida* de X y se denota por ΣX.

Dados dos espacios topológicos X y Y y subconjuntos $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, entonces por $\langle A, B\rangle$ denotaremos al conjunto de todas las aplicaciones continuas $f : X \to Y$ tales que $f(A) \subseteq B$. Por X^Y denotaremos al conjunto de todas las funciones continuas de X en Y, entonces la familia de conjuntos
$\{\langle K, U\rangle | K \subset X \text{es compacto y } U \subset Y \text{es abierto}\}$ es subbase de una topología sobre X^Y llamada la *topología compacto-abierta* de X^Y. El espacio X^Y con esta topología se llama el *espacio potencia de* X respecto de Y.

Dado un espacio con punto base (X, x_0), definimos ΩX como el espacio de todos los caminos cerrados en x_0, dotado de la topología compacto-abierta, llamado *el espacio de los lazos de* X *en* x_0, su punto base es el camino constante en x_0. De forma inductiva se define $\Omega^n X := \Omega^{n-1} X$.

La suspensión reducida y el espacio de lazos poseen estructuras de H-cogrupo y H-grupo respectivamente, ver por ejemplo [10] o [4].

Decimos que dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ son homotópicas, si existe una aplicación continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. H se llama una *homotopía* de f a g. La relación de homotopía es una relación de equivalencia. Si f y g son homotópicas escribiremos $f \simeq g$. En el caso en que los espacios sean con puntos base, exigiremos que las funciones continuas mapeen puntos base en puntos base y que la homotopía cumpla además la condición $H(x_0, t) = y_0$, $\forall t \in I$. La clase de homotopía de una aplicación f se suele denotar por $[f]$.

Decimos que $f : X \to Y$ es una *homotopia-equivalencia*, si f es continua y existe una aplicación continua $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$, en tal caso decimos que los dos espacios son *homotópicamente equivalentes.* Si X y Y son homotópicamente equivalentes escribiremos $X \simeq Y$. Si un espacio es homotópicamente equivalente a un punto, entonces se dice que es *contractible.*

Definimos $[X, Y] := \{[f]|f : X \to Y$ continua$\}$. Si los espacios son con punto base entonces f debe mapear punto base en punto base y en $[X, Y]$ existe un elemento distinguido que es la clase de la aplicación constante con valor y_0. $[,]$ es un funtor contravariente en la primera variable y covariante en la segunda y posee además las siguientes propiedades:

1. $[X \vee Y, Z] \approx [X, Z] \times [Y, Z]$
2. $[X, Y \times Z] \approx [X, Y] \times [X, Z]$
3. Si (X, x_0) es un H-cogrupo o (Y, y_0) un H-grupo, entonces $[X, Y]$ es un grupo. $[X, Y]$ es abeliano si ambas condiciones se cumplen.
4. Para todo par de espacios con punto base (X, x_0) y (Y, y_0) se tiene el siguiente isomorfismo de grupos $[\Sigma X, Y] \approx [X, \Omega Y]$
5. De 3. y 4. se obtiene que $[\Sigma^n X, Y]$ es siempre un grupo abeliano, para n>1.

2. Introducción a la K-Teoría

2.1. Fibrados Vectoriales. Un *fibrado vectorial* (real o complejo) ξ es una tríada (E, B, p) , donde E, B son espacios topológicos y $p : E \to b$ una aplicación continua y se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall b \in B$*la fibra* $E_b := p^{-1}(b)$ está dotada de una estructura de espacio vectorial (real o complejo) compatible con la topología relativa de E_b en E
2. *Propiedad de trivialidad local*: $\forall b \in B$ existe un abierto $U \subseteq B$, tal que $p^{-1}[U]$ es homeomorfo a $U \times V$, donde V es un cierto espacio vectorial (real o complejo). $\forall b \in U$ la fibra $p^{-1}(b)$ es isomorfa a V.

E se llama *el espacio total* y B *espacio base* del fibrado vectorial ξ. Un simple cálculo muestra que, bajo estas condiciones, p es sobreyectiva y se llama *la proyección* de E sobre B.

Si $\forall b \in B\ dimp^{-1}(b) = n$ entonces se dice que el fibrado ξ es de *dimensión* n.

Una aplicación continua $s : B \to E$ tal que $p(s(b)) = b$, $\forall b \in B$, se llama una *sección* de ξ. Obviamente $\forall b \in B$, $s(b) \in E_b$. Al conjunto de todas las secciones de un fibrado xi lo denotaremos por $\Gamma(\xi)$ o también por $\Gamma(E)$. Por simplicidad y abuso de lenguaje se suele decir el fibrado E al referirse al fibrado $\xi = (E, B, p)$.

Ejemplo 2.1.1. *Sea X un espacio tolopógico, V un espacio vectorial,*
$E := X \times V$, $p : X \times V \to X$ la proyección sobre X, entonces (E, X, p) es un fibrado vectorial con $E_x \approx V\ \forall x \in X$ y se llama el fibrado trivial sobre X.

Ejemplo 2.1.2. *Sea X una variedad diferenciable T_x el espacio tangente en x. Definimos $E := \bigcup_{x \in X} T_x$ y $p : E \to X$ como la aplicación que mapea T_x sobre x, entonces (E, X, p), es un fibrado vectorial sobre X llamado el fibrado tangente de X.*

Si (E, X, p) es un fibrado y $Y \subset X$ un subespacio, entonces $(p^{-1}[Y], Y, p)$ es un fibrado sobre Y, llamado la *restricción de* E a Y y se suele denotar por $E|_Y$.

Sea $\xi = (E, X, p)$ un fibrado sobre X y $f : Y \to X$ una aplicación continua , entonces F induce un fibrado sobre Y que lo denotaremos por $f^*\xi =$

(f^*E, Y, p^*), $f^*E := \{(e,x) \in E \times X | p(e) = f(x)\}$, f induce además una aplicación $f^* : f^*E \to E$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "p^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "f^*"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

es conmutativo y la restricción de f^* a cada fibra es lineal.

Sean $\xi := (E, X, p)$ y $\eta(F, Y, q)$ dos fibrados sobre X. Un *homomorfismo de fibrados* $\Phi : \xi \to \eta$ consta de una pareja(φ, f), donde $\varphi : E \to F$ y $f : X \to Y$ son aplicaciones continuas tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo y tal que $\varphi|_{E_x}$ es una aplicación lineal de E_x en $F_{f(x)}$. Φ queda determinado por φ.

Si φ es un homeomorfismo y su restricción a cada fibra un isomorfismo, entonces se dice que Φ es un *isomorfismo de fibrados vectoriales*. La relación de isomorfía es una relación de equivalencia. Por $[E]$ denotaremos la clase de equivalencia del fibrado $\xi := (E, X, p)$.

Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Φ es un isomorfismo de fibrados.
2. φ es biyectiva.
3. $\varphi|_{E_x}$ es un isomormismo de espacios vectoriales $\forall x \in X$.

El fibrado inducido por una aplicación f posee la siguiente propiedad universal: dado otro fibrado $\eta = (F, Y, q)$ y un homomorfismo de fibrados $\Phi : \eta \to \xi$, entonces existe un único homomorfismo de fibrados $\Phi^* : \eta \to f^*\xi$, $\Phi^* = (\varphi^*, 1_Y)$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, "\varphi^*"] \arrow[drr, bend left, "\varphi"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\ & f^*E \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "q"] & E \arrow[d, "p"'] \\ & Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

es conmutativo en todas sus componentes. $\Phi^* = (\varphi^*, 1_Y)$. Por otra parte, si Y es un subespacio de un espacio compacto, f^*E sólo depende de la clase de homotopía de f.

2.2. Operaciones sobre fibrados. Dados dos fibrados E y F sobre un espacio X, podemos definir las siguientes operaciones:

- *La Suma de Whitney*: es el fibrado $E \oplus F$ cuyas fibras vienen dadas por $(E \oplus F)_x := E_x \oplus F_x$
- *El Producto Tensorial*: es el fibrado $E \otimes F$ cuyas fibras vienen dadas por $(E \otimes F)_x := E_x \otimes F_x$.

Decimos que $F \subset E$ es un *subfibrado* de E si $(F, X, p|_F)$ es un fibrado. En este caso F_x es un subespacio de E_x y se puede definir el *fibrado cociente* E/F como el fibrado cuyas fibras vienen dadas por $(E/F)_x := E_x/F_x$.

Particularmente interesante son los fibrados sobre espacios topológicos compactos, ya que éstos poseen propiedades adicionales. En particular toda sección definida sobre un subconjunto cerrado de un espacio compacto posee una extensión a todo el espacio. Además, si las restricciones de dos fibrados a un subespacio cerrado resultan isomorfas, este isomorfismo puede ser extendido a la restricción de los fibrados a un abierto que contiene al subespacio.

También se tienen las siguientes propiedades importantes:

1. Si E es un fibrado sobre un espacio compacto X, entonces E admite una métrica Hermitiana.
2. Para todo fibrado E sobre un espacio compacto X existe un epimorfismo $\varphi : X \times \mathbb{C}^n \to E$, para algún n.
3. Para todo fibrado E sobre un espacio compacto X existe un fibrado F, tal que $E \oplus F$ es trivial.

2.3. Construcción del grupo $K(X)$ para un espacio topológico X. Para lo que sigue asumiremos, salvo especificación de lo contrario, que todos los espacios topológicos son compactos y los fibrados vectoriales commplejos.

La idea asociarle al espacio topológico X un grupo de Grothendieck $K(X)$. Ahora bien, este grupo se construye sobre un semigrupo que llamaremos $Vect(X)$ y que definiremos de la siguiente forma: Por $Vect(X)$ denotaremos al conjunto de todas las clases de isomorfía de los los fibrados vectoriales sobre X y por $Vect_n(X)$ al subconjunto de $Vect(X)$ de las clases de los fibrados de dimensión n, en el cual distinguiremos, en particular, a la clase del fibrado trivial. La suma de Whitney induce sobre $Vect(X)$ uns operación binaria $\oplus : Vect(X) \times Vect(X) \to Vect(X)$ de la siguiente forma $[E] \oplus [F] := [E]$
oplusF], de la cual se muestra que está bien definida y que entonces $(Vect(X), \oplus)$ es un semigrupo abeliano.

Propiedades de $Vect(X)$.

1. Toda aplicación continua $f : X \to Y$ induce una aplicación $f^* : Vect(Y) \to Vect(X)$.
2. Si f es una homotopía equivalencia, entonces f^* es una biyección.
3. Si X es contractible, entonces todo fibrado sobre X es trivial y $Vect(X)$ es isomorfo al semigrupo aditivo de los enteros no negativos.
4. Si Y es un subespacio cerrado y contractible de X, entonces la aplicación canónica $\pi : X \to X/Y$ induce una biyección $\pi^* : Vect(X/Y) \to Vect(X)$.

Interpretación teórico-homotópico de $Vect_n(X)$. Un primer resultado que se demuestra relativamente fácil y del cual esbozaremos la demostración es el siguiente

Teorema 2.3.1. *Para la suspensión SX del espacio X se tiene un isomorfismo natural $\varphi : Vect_n(SX) \xrightarrow{\sim} [X, Gl_n(\mathbb{C})]$, el cual induce una estructura de grupo sobre $Vect_n(SX)$ ya que $[X, Gl_n(\mathbb{C})]$ es un grupo.*

La construcción de este isomorfismo ocurre de la siguiente manera: La suspensión SX se puede considerar como la unión de dos conos sobre X, (ver Figura 1.3.1) los cuales son conractibles y cuya intersección es X. Las trivializaciones respectivas inducen un homomorfismo de fibrados triviales $X \times V \to X \times V$, quien a su vez induce una aplicación $X \to Gl_n(\mathbb{C})$, por lo que se tiene una aplicación $\varphi : Vect(SX)_n \to [X, Gl_n(\mathbb{C})]$ de la cual se puede mostrar que es un isomorfismo.

Para la interpretación de $Vect(X)$ se procede de la siguiente forma: Dado un espacio vectorial cualquiera V, consideremos la *Grassmanniana* $G_n(V)$ consistente en el conjunto de todos los subespacios de V de codimensión n. Si sobre V está definida una métrica hermitiana, cada subespacio de V induce un operador de proyección, el cual define una aplicación $G_n(V) \to End(V)$ y dotamos a $G_v(V)$ de la topología inicial inducida por esta aplicación. Se puede mostrar que esta topología no depende de la métrica escogida para V.

Dado un fibrado n-dimensional E, existe un espacio vectorial V y un homomorfismo de fibrados $\psi : X \times V \to E$ cuya restricción ψ_x a la fibra de x define una aplicación continua $f : X \to G_n(V)$ por medio de la asignación $x \mapsto Ker\psi_x \subseteq V$.

Sobre la Grassmanniana $G_n(V)$ podemos definir el fibrado
$F := \{(g, v) \in G_n(V) \times V | v \in g\}$, el cual es un subfibrado de $G_n(V) \times V$, por lo que se puede definir el fibrado $E(F) := (G_n(V) \times V)/F$ llamado el *fibrado de clasificación* sobre $G_n(V)$. Este fibrado posee la propiedadd siguiente: Si E es un fibrado n-dimensional sobre X y $f : X \to G_n(V)$ la aplicación inducida por el homomorfismo $\psi : X \times V \to E$, entonces $E \approx f^*E(F)$.

Consideremos ahora la proyección $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{m-1}$, $(z_1, \cdots, z_m) \mapsto (z_1, \cdots, z_{m-1})$, ésta induce aplicaciones continuas $i_{m-1} : G_n(\mathbb{C}^{m-1}) \to G_n(\mathbb{C}^m)$. Si $E_{(m)}$ denota el fibrado de clasifiación sobre $G_n(\mathbb{C}^m)$, entonces $i^*_{m-1}E_{(m)} \approx E_{(m-1)}$. La familia $\{G_n(\mathbb{C}^n, i_{m-1}\}_{m\in\mathbb{Z}^+}$ forma un sistema inductivo o directo, el cual induce uno sobre la familia de los conjuntos de homotopía $[X, G_n(\mathbb{C}^m)]$ y podemos formar el límite directo o inductivo(ver por ejemplo [10]) $\varinjlim_m [X, G_n(\mathbb{C}^m)]$ y se puede mostrar que se tiene un isomorfismo $\varinjlim_m [X, G_n(\mathbb{C}^m)] \to Vect_n(X)$ inddducido por la aplicación definida por $f \mapsto f^*E_{(m)}$ $f : X \to G_n(\mathbb{C}^m)$. El límiter inductivo conmuta con el funtor $[X,]$ cuando X es compacto. [4]

Estamos ahora en condiciones de definir el grupo (anillo) deGrothendieck $K(X)$ para un espacio compacto X.

Dado el espacio X compacto, le asociamos el semigrupo abeliano $(Vect(X), \oplus)$ y definimos $K(X) := K(Vect(X))$, como el grupo de Grothendieck asociado al semigrupo $Vect(X)$.

Por otra parte se tiene que $(Vect(X), \oplus, \otimes)$ es un semianillo, por lo que $K(X)$ posee también la estructura de anillo, llamado el *anillo de Grothendieck asociado al espacio* X (ver subsección 1.2.1).

$K(X)$ tiene las siguientes propiedades:

1. Todo elemento de $K(X)$ tiene la forma $[E] - [F]$, donde E, F son fibrados sobre X.
2. $K()$ es un funtor contravariante de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los grupos abelianos (anillos). Es decir si $f : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces f induce un homomorfismo de grupos (anillos) $f^* : K(Y) \to K(X)$, donde f^* depende únicamente de la clase de homotopía de f.
3. $K(X) \approx \mathbb{Z} \times \varinjlim_n Vect_n(X)$. Definimos $\tilde{K}(X) := \varinjlim_n Vect_n(X)$.

4. Si$U(n)$ es el *grupo unitario*, $U := \varinjlim_n U(n))$, el *grupo unitario infinito*, $BU(n) := \varinjlim_m G_n(\mathbb{C}^m))$ y $BU := \varinjlim_n BU(n))$, entonces $[X, BU] \approx \tilde{K}(X)$.
5. de 4. se obtiene $K(X) \approx \mathbb{Z} \times \tilde{K}(X) \approx \mathbb{Z} \times [X, BU] \approx [X, \mathbb{Z} \times BU]$
6. Considerando que $U \simeq \Omega(BU)$ se tiene $\tilde{K}(SX) \approx [SX, BU] \approx [X, \omega BU] \approx [X, U]$.

De forma más general se define para $n > 0$: $K^{-n}(X) := [S^n X, BU] \approx [X, \Omega^n(BU)] \approx [X, \Omega^{n-1}U]$.

Esta definición se puede extender a pares de espacios compactos (X, Y) y a espacios con punto base (X, x_0), lo que va a permitir obtener una sucesión exacta análoga a la obtenida en cohomología (ver por ejemplo [10]).

Uno de los resultados más importantes en la K-teoría es el sisguiente teorema de periodicidad de Bott:

Teorema 2.3.2. *Si X es un espacio topológico compacto, entonces $K(X) \approx K^{-2}(X)$.*

Este teorema es equivalente al siguiente resultado $K(\mathbb{S}^2) \otimes K(X) \approx K(\mathbb{S}^2 \times X)$, donde $\mathbb{S}^2$ es la 2-esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$.

El teorema de periodicidad permite definir los grupos $K^n(X)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ y se puede mostrar que la familia de funtores $\{K^n(.)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfacen los axiomas de Eilenberg-Steenberg para una teoría de cohomología.

3. El Grupo $K(X)$ y los Operadores de Fredholm

Sea H un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita, $\mathcal{F}$ el semigrupo de los operadores de Fredholm sobre H. Entonces si X es un espacio compacto, el grupo $K(X)$ puede ser representado por $\mathcal{F}$ en el siguiente sentido: Existe iun isomorfismo entre $[X, \mathcal{F}]$ y $K(X)$, además si $\mathcal{K} \subset End(H)$ es el conjunto de operadores compactos y $\mathcal{B}^*$ el subgrupo de unidades (elementos invertibles) del álgebra de Banach $\mathcal{B} := End(H)/\mathcal{K}$, entonces existe un isomorfismo entre $K(X)$ y $[X, \mathcal{B}^*]$.

3.1. Construcción de los Isomorfismos. Si F es un operador de Fredholm, el índice define una aplicación $\mathcal{F} \to \mathbb{Z}$. El primer paso será el de generalizar el concepto de *índice de un operador* a una aplicación continua $T : X \to \mathcal{F}$, donde X es un espacio compacto, de modo tal que $IndT \in K(X)$.

Si X es un espacio compacto y $T : X \to \mathcal{F}$ una aplicación continua, entonces:

a) Existe un subespacio $V \in H$ de codimensión finita, tal que $V \cap KerT_x = 0$, $\forall x \in X$, donde $T_x := T(x)$.
b) $\bigcup_{x \in X} H/(T_x(V))$, topologizado como espacio cociente de $X \times H$, es un fibrado vectorial sobre X y lo denotaremos por $H/T(V)$.
c) Si $[H/V]$ es la clase del fibrado $(X \times H)/V$, el elemento $([H/V] - [H/T(V)]) \in K(X)$, no depende de la escogencia de V en a) y sólo depende de la clase de homotopía de T, lo que permite definir una aplicación $ind : [X, \mathcal{F}] \to K(X)$ por $ind(T) := ([H/V] - [H/T(V)]) \in K(X)$. $ind(T)$ se llama el *índice de T en $K(X)$*.

Observacón 3.1.1. Si X es un punto, entonces $[X, \mathcal{F}]$ es el conjunto de las componentes conexas por caminos de $\mathcal{F}$ y la clase de T está determinada por la escogencia de un operador F en una componente. Entonces resulta que $ind(T) = indF \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente la aplicación ind es una generalización del índice de un operador.

d La aplicación $ind : [X, \mathcal{F}] \to K(X)$ es un isomorfismo. En efecto, se muestra que dadas dos aplicaciones $T, S : X \to \mathcal{F}$, entonces $ind(T \cdot S) = ind(T) + ind(S)$, donde $\cdot$ es el producto inducido en $[X, \mathcal{F}]$ por la estructura de semigrupo de $\mathcal{F}$. Además se muestra que que es biyectiva. Esto se hace mostrando que se tiene una sucesión corta exacta de semigrupos:

$$[X, Gl(H)] \to [X, \mathcal{F}] \stackrel{ind}{\to} K(X) \to 0$$

y por un resultado de Kuiper [9], en que muestra que el grupo de elementos invertibles $Gl(H) \in End(H)$, es contractible, resulta el isomorfismo

El isomorfismo entre $K(X)$ y $[X, \mathcal{B}]$ resulta de las siguientes consideraciones:

a) $(1 + \mathcal{K}) \subset \mathcal{F}$, donde 1 es la identidad en $End(H)$.
b) Si $\pi : End(H) \to \mathcal{B}$ es la proyección canónica, entonces $\mathcal{F} = \pi^{-1}[\mathcal{B}^*]$, $\pi[End(H)$ es denso en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^*$ es abierto.
c) Si $\tilde{\pi} : M \to N$ es una aplicación lineal y continua entre espacios de Banach, tal que $\tilde{\pi}[M]$ es denso en N, y U es un abierto cualquiera, entonces, para todo espacio compacto X, $\tilde{\pi}$ induce una biyección $[X, \tilde{\pi}^{-1}[U]] \to [X, U]$.
d) Aplicando c) a $M = End(H)$, $N = \mathcal{B}$, $U = \mathcal{B}^*$, y $\pi : End(H) \to \mathcal{B}$ la proyección canónica, resulta la biyección deseada.

Una generalización de estos resultados para los grupos $K^n(X)$, es dada por Karoubi en [7], quien construye, con la ayuda de los operadores de Fredholm un grupo $\bar{K}^n(X)$ isomorfo a $K^n(X)$.

Referencias

1. Atiyah, M.F, *K-Theory.* Editorial Benjamin 1988
2. Atiyah, M.F, *Algebraic Topology and Operators in Hilbertspace*, Springer Lecture Notes in Mathematics, **103**, 1969, 101-122.B
3. Atiyah, M.F y I.M. Singer, *The Index of Elliptic Operators I*, Ann. of Math. **87**. 484-534.
4. Bauer, F.W, *Homotopietheorie*, B.I. Hochschultaschenbücher **475/a/b**, 1971
5. Conner, P.E y E.E. Floyd, *The Relation of Cobordism to K-Theories*, Springer Lecture Notes, Vol. **28**
6. Hirzebruch, Friedrich y W. Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis*, B.I Hochschultaschenbücher **296a***, 1971.
7. Karoubi M., *Categoies Banachiques et K-Theory, Applications aux opérateurs de Fredholm et à la K-Theory algébrique*, Comptes rendues du K-Colloque, Université de Montpellier, Faculté de Sciences. 1967-1968. No. **29**. Vol. III.
8. Karoubi M., *Cohomology des Categories de Banach*, C.R. Acad. Sc. Paris I. 263, 1965, 19-30.
9. Kuiper, N.H, *The Homotopy Type of the Unitary Group of Hilbert Space*, Topology **3**, 1965, 19-30.
10. Spanier, E, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966
11. tom Dieck, Tammo, *Topology*, de Gruyter Lehrbuch, 1991.

Departamento de Matemáticas, CIMACIEN, Guatemala
E-mail address: `jescamilla@cimacien.org.gt`
URL: `cimacien.org.gt`